با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام ریاضی (۲) پایه یازدهم
پودمان دوم

عنوان فصل: تابع‌های خطی و درجه دوم و کاربرد آنها در حل معادله‌ها و نامعادله‌ها

از صفحه‌ی ۳۳ تا صفحه‌ی ۶۰ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل تابع‌های خطی و درجه دوم و کاربرد آنها در حل معادله‌ها و نامعادله‌ها آمده است.

مباحث فصل: تابع‌های خطی، تابع‌های درجه دوم، کاربرد تابع‌ها در حل معادله‌ها و نامعادله‌ها

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱ صفحه ۳۵ · فعالیت — رشد بامبو ۴

۲ صفحه ۳۷ · کار در کلاس — تعداد طرح‌های رضا ۴

۳ صفحه ۳۸ · فعالیت — خودرو پشت چراغ قرمز ۵

۴ صفحه ۳۹ · کار در کلاس — تابع ثابت و مساحت مثلث ۶

۵ صفحه ۴۱ · فعالیت — تغییر نمودار تابع خطی با a و b ۷

۶ صفحه ۴۲ · کار در کلاس — خط‌های هم‌خانواده ۷

۷ صفحه ۴۴ · مسئله — تشخیص جدول تابع خطی ۸

۸ صفحه ۴۴ · مسئله — حقوق علی در شرکت بیمه ۸

۹ صفحه ۴۴ · مسئله — حرکت کشتی از ساحل ۸

۱۰ صفحه ۴۵ · مسئله — دمای هوای تهران در یک هفته ۹

۱۱ صفحه ۴۵ · مسئله — سانتی‌گراد و فارنهایت ۹

۱۲ صفحه ۴۷ · فعالیت — شکل نمودار تابع‌های درجه‌ی دوم ۱۰

۱۳ صفحه ۴۸ · کار در کلاس — تعیین k و p و q از روی نمودار ۱۰

۱۴ صفحه ۴۹ · مسئله — k و p و q از نمودار ۱۱

۱۵ صفحه ۴۹ · مسئله — انتخاب قانون تابع از روی نمودار ۱۱

۱۶ صفحه ۴۹ · مسئله — پرتاب توپ بسکتبال ۱۲

۱۷ صفحه ۵۰ · فعالیت — دما و ارتفاع در کوه دماوند ۱۲

۱۸ صفحه ۵۲ · کار در کلاس — سقوط قطره‌ی آب از آبشار ۱۳

۱۹ صفحه ۵۳ · مسئله — جواب‌های معادله از روی نمودار ۱۳

۲۰ صفحه ۵۳ · مسئله — حل معادله با رسم نمودار ۱۴

۲۱ صفحه ۵۳ · مسئله — پرتاب توپ و ارتفاع ۲ متر ۱۴

۲۲ صفحه ۵۴ · فعالیت — درآمد فروش دست‌ساز ۱۵

۲۳ صفحه ۵۵ · کار در کلاس — درآمد فروش تلفن همراه ۱۵

۲۴ صفحه ۵۶ · فعالیت — حل نامعادله با نمودار ۱۶

۲۵ صفحه ۵۸ · کار در کلاس — عرض مستطیل با مساحت کمتر از ۲۵ ۱۶

۲۶ صفحه ۵۹ · مسئله — جواب نامعادله از روی نمودار ۱۷

۲۷ صفحه ۵۹ · مسئله — حل نامعادله‌ها ۱۷

۲۸ صفحه ۵۹ · مسئله — ارتفاع پرتابه بیش از ۲۰۰ متر ۱۸

۲۹ صفحه ۵۹ · مسئله — محیط مثلث و مساحت مربع ۱۸

۳۰ صفحه ۵۹ · مسئله — درآمد کارگاه قطعات یدکی ۱۹

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱ صفحه ۳۵ فعالیت

نوعی بامبو پس از آن که به ارتفاع ۲۰ سانتی‌متر می‌رسد، به طور تقریبی در هر ساعت ۳٫۸ سانتی‌متر رشد می‌کند. اگر ارتفاع بامبو (بر حسب سانتی‌متر) پس از t ساعت را با h(t) نشان دهیم، h(t) = 20 + 3.8 t و دامنه‌ی تابع [[0, 24 است. ۱) جدول زیر را کامل کنید و اختلاف مقادیر تابع را بنویسید. (t = ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ ساعت)

۲) به ازای هر یک واحد افزایش مقدار t، مقدار h چه تغییری می‌کند؟

۳) رابطه‌ی بین دو کمیت h و t خطی است یا غیرخطی؟ چرا؟

۴) h(2) چه چیزی را نشان می‌دهد؟ h(18) چطور؟

۵) اگر h(a) = 39، a را پیدا کنید. این مقدار چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۱) با جای‌گذاری در h(t) = 20 + 3.8 t:

جدول کامل‌شده

t (ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴
h (سانتی‌متر)	20	23.8	27.6	31.4	35.2
اختلاف مقادیر متوالی	—	3.8	3.8	3.8	3.8

۲) به ازای هر یک واحد افزایش t، مقدار h به اندازه‌ی ثابت **۳٫۸ واحد** افزایش می‌یابد.

۳) رابطه **خطی** است؛ زیرا قانون تابع یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۱ است، اختلاف مقادیر تابع به ازای هر یک واحد تغییر t ثابت (۳٫۸) است و نمودار آن خط راست با شیب ۳٫۸ است.

۴) h(2) = 20 + 3.8 x 2 = 27.6: ارتفاع بامبو پس از ۲ ساعت که ۲۷٫۶ سانتی‌متر است. h(18) = 20 + 3.8 x 18 = 88.4 =: ارتفاع بامبو پس از ۱۸ ساعت که ۸۸٫۴ سانتی‌متر است.

۵) 20 + 3.8 a = 39 پس 3.8 a = 19 و a = 5.

پس از ۵ ساعت، ارتفاع بامبو به ۳۹ سانتی‌متر می‌رسد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲ صفحه ۳۷ کار در کلاس

رضا تا سال قبل ۵ طرح رسم کرده بود و تصمیم گرفت از این به بعد هر ماه ۲ طرح ارائه کند و این کار را تا ۱۲ ماه ادامه دهد. ۱) رضا قبل از این تصمیم چند طرح داشت؟ در آخر ماه اول چند طرح داشت؟ در آخر ماه پنجم چطور؟

۲) اگر تعداد ماه‌های سپری شده را با x و تعداد کل طرح‌ها پس از x ماه را با f(x) نمایش دهیم، قانون تابع f و دامنه‌ی آن را بنویسید.

۳) مقادیر f(0) و f(10) را به دست آورید و معنای آن را بیان کنید. آیا f(−1) معنایی دارد؟

۴) اگر دامنه‌ی تابع را بازه‌ی [[0, 12 در نظر بگیریم، نمودار تابع را رسم کنید.

۵) اگر f(a) = 17، مقدار a را به دست آورید و معنای آن را بیان کنید.

۱) قبل از تصمیم: ۵ طرح. آخر ماه اول: 7 = 2 + 5 طرح. آخر ماه پنجم: 15 = 5 x 2 + 5 طرح.

۲) هر ماه ۲ طرح به ۵ طرح اولیه اضافه می‌شود:

f(x) = 2x + 5 ، دامنه: [[0, 12

۳) f(0) = 5: تعداد طرح‌ها قبل از شروع برنامه (۵ طرح). f(10) = 2 x 10 + 5 = 25: تعداد کل طرح‌ها پس از ۱۰ ماه (۲۵ طرح). f(−1) معنایی ندارد؛ زیرا 1− خارج از دامنه است و ماه منفی (پیش از شروع برنامه) در این مسئله معنا ندارد.

۴) چون f(0) = 5 و f(12) = 29، نمودار پاره‌خطی است که نقطه‌ی (0, 5) را به نقطه‌ی (12, 29) وصل می‌کند و شیب آن ۲ است (به ازای هر ماه، ۲ واحد بالا می‌رود).

۵) 17 = 2a + 5 پس 2a = 12 و a = 6.

پس از ۶ ماه، تعداد کل طرح‌های رضا ۱۷ می‌شود.

۳ صفحه ۳۸ **فعالیت**

خودرویی از نقطه‌ی A شروع به حرکت می‌کند و پس از طی ۲ کیلومتر پشت چراغ قرمز می‌ایستد. مدت زمان چراغ قرمز ۲۰ ثانیه است. ۱) مقدار مسافت طی شده به وسیله‌ی خودرو از نقطه‌ی A پس از ۲ ثانیه توقف پشت چراغ قرمز چقدر است؟ پس از ۵ ثانیه چطور؟

۲) جدول را کامل کنید. (زمان توقف t: ۰، ۲، ۵، ۱۰، ۲۰ ثانیه؛ مسافت طی شده d بر حسب کیلومتر)

۳) نمودار تابع را از زمان t = 0 تا زمان t = 20 رسم کنید.

۴) با تغییر زمان (t)، مسافت طی شده (d) چه تغییری می‌کند؟

۱) خودرو ایستاده است، پس مسافت آن از نقطه‌ی A تغییر نمی‌کند: پس از ۲ ثانیه و پس از ۵ ثانیه هر دو **۲ کیلومتر**.

۲)

جدول کامل‌شده

t (ثانیه)	۰	۲	۵	۱۰	۲۰
d (کیلومتر)	۲	۲	۲	۲	۲

۳) نمودار، پاره‌خطی افقی (موازی محور t) است که از نقطه‌ی (0, 2) تا نقطه‌ی (20, 2) کشیده می‌شود.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴) با تغییر t، مقدار d هیچ تغییری نمی‌کند و همیشه ۲ است. قانون تابع $d(t) = 2$ است که یک تابع ثابت است.

۴ صفحه ۳۹ **کار در کلاس**

۱) نمودارهای داده شده چند تابع خطی را نشان می‌دهند. مشخص کنید کدام نمودار مربوط به تابع ثابت است. دلیل خود را توضیح دهید.

۲) در صفحه‌ی مختصات، مثلثی با رئوس $A = (0, 0)$، $B = (3, 0)$ و $C = (0, 2)$ رسم کنید. خط L از نقطه‌ی C می‌گذرد و موازی محور xهاست. الف) مساحت مثلث ABC را به دست آورید. ب) x طول نقطه‌ای از خط L (مانند E) و $S(x)$ مساحت مثلث ABE است. جدول را برای $x = -2, -1, 0, 1, 2$ کامل کنید و اختلاف مقادیر تابع را بنویسید. پ) قانون این تابع را بنویسید و توضیح دهید چرا S تابعی خطی از x است؟ ت) به ازای هر یک واحد افزایش x، مقدار $S(x)$ چه تغییری می‌کند؟ شیب این خط چقدر است؟ ث) با استفاده از جدول، نمودار تابع را رسم کنید.

۱) نموداری که **خط افقی** (موازی محور xها) است، نمودار تابع ثابت است؛ زیرا در تابع ثابت $f(x) = c$ مقدار تابع به ازای همه‌ی xها یکسان است، پس همه‌ی نقاط نمودار عرض برابر دارند و خط، شیب صفر دارد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲) الف) مثلث ABC در A قائمه است، پس مساحت آن $1/2 \times AB \times AC = 1/2 \times 3 \times 2 = 3$ است.

ب) نقطه‌ی E روی خط L (به ارتفاع ۲ از محور x) است، پس ارتفاع مثلث ABE نسبت به قاعده‌ی AB همیشه ۲ است و مساحت آن همیشه $1/2 \times 3 \times 2 = 3$ می‌شود:

جدول کامل‌شده

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
S(x)	۳	۳	۳	۳	۳
اختلاف مقادیر	—	۰	۰	۰	۰

پ) قانون تابع $S(x) = 3$ است. چندجمله‌ای ثابت، چندجمله‌ای درجه‌ی ۱ با ضریب x برابر صفر $(S(x) = 0x + 3)$ است، پس S تابع خطی (و از نوع تابع ثابت) است.

ت) به ازای هر یک واحد افزایش x، مقدار $S(x)$ تغییری نمی‌کند (تغییر ۰). نمودار خطی افقی است و شیب آن 0 است.

ث) نمودار، خط راستی افقی است که از نقطه‌های $(-2, 3)$، $(-1, 3)$، $(0, 3)$، $(1, 3)$ و $(2, 3)$ می‌گذرد (خط $y = 3$).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۵ صفحه ۴۱ فعالیت

تابع خطی f(x) = ax + b را در نظر بگیرید. با استفاده از نرم‌افزار، دو لغزنده برای a و b در نظر بگیرید. ۱) با ثابت نگه داشتن a و تغییر مقادیر b، نمودار تابع چگونه تغییر می‌کند؟ وضعیت خط‌های به دست آمده نسبت به هم چگونه است؟

۲) با ثابت نگه داشتن b، به ازای مقادیر مختلف a، نمودار تابع چگونه تغییر می‌کند؟

۳) اگر a مثبت باشد، زاویه‌ی خط با جهت مثبت محور طول‌ها چگونه است؟ اگر a منفی باشد چطور؟

۱) شیب همه‌ی خط‌ها برابر a است، پس خط‌ها **با هم موازی** هستند. با افزایش b، خط به موازات خود به بالا و با کاهش b، به موازات خود به پایین منتقل می‌شود؛ وقتی b = 0 خط از مبدأ مختصات می‌گذرد.

۲) همه‌ی خط‌ها از نقطه‌ی ثابت (0, b) روی محور y می‌گذرند (زیرا f(0) = b) و شیب‌های متفاوت دارند؛ هرچه |a| بزرگ‌تر باشد، خط تندتر است و با تغییر a خط حول این نقطه می‌چرخد.

۳) اگر a > 0 خط با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی **تند** (کمتر از ۹۰ درجه) می‌سازد و اگر a < 0 این زاویه **باز** (بیشتر از ۹۰ درجه) است.

۶ صفحه ۴۲ کار در کلاس

۱) وضعیت خط‌های به معادله‌ی 5x + 2y = c را به ازای مقادیر مختلف c توصیف کنید. شیب این خط‌ها چقدر است؟

۲) وضعیت خط‌های به معادله‌ی cx + 2y = 4 را به ازای مقادیر مختلف c توصیف کنید. این خط‌ها از چه نقطه‌ی مشترکی می‌گذرند؟

۳) آیا هر خطی در صفحه‌ی مختصات، نمودار یک تابع خطی است؟ چرا؟

۱) معادله را برای y حل می‌کنیم: y = −5/2 x + c/2. پس همه‌ی خط‌ها شیب −5/2 دارند و با هم **موازی** هستند؛ با تغییر c فقط عرض از مبدأ (c/2) عوض می‌شود و خط به موازات خود بالا یا پایین می‌رود.

۲) y = −c/2 x + 2. شیب خط‌ها (−c/2) با c تغییر می‌کند، ولی عرض از مبدأ همیشه ۲ است؛ پس همه‌ی خط‌ها از نقطه‌ی (0, 2) می‌گذرند و با تغییر c حول آن می‌چرخند.

۳) خیر. خط قائم (موازی محور yها) مانند x = 2 نمودار تابع نیست، زیرا به یک x بی‌شمار y نسبت می‌دهد، پس تابع خطی هم نیست. هر خط غیرقائم نمودار یک تابع خطی است.

۷ صفحه ۴۴ مسئله

جدول مقادیر چهار تابع داده شده است. کدام جدول می‌تواند مربوط به یک تابع خطی باشد؟ g: برای x = −2, −1, 0, 1 مقدارها 40−, 25−, 10−, 5 f: برای x = −2, −1, 0, 1 مقدارها 1, 0, 1−, 8− k: برای x = 0, 1, 2, 3 مقدارها 7, 5, 3, 1 h: برای x = −2, −1, 0, 1 مقدارها 5, 5, 5, 5

در تابع خطی، به ازای هر ۱ واحد افزایش x، تغییر مقدار تابع ثابت است. اختلاف مقادیر متوالی را بررسی می‌کنیم:

- g: 15− − 10− = 5 − 15− = 10− − (25−) = 15 − 40− = 25− − (10−)، ثابت است، پس **خطی** است.
- f: 7 − (8−) = 1 − 1−، 1 − (1−) = 0 − 1 = 1 − 0، ثابت نیست، پس خطی **نیست**.
- k: 2 − 1 = 3 − 2 = 5 − 3 = 7 − 5 = 2، ثابت است، پس **خطی** است (k(x) = 2x + 1).
- h: همه‌ی اختلاف‌ها صفر است، پس **خطی** است (تابع ثابت h(x) = 5).

جدول‌های g، k و h می‌توانند مربوط به تابع خطی باشند.

۸ صفحه ۴۴ مسئله

علی در یک شرکت بیمه کار می‌کند. او ۱,۰۰۰,۰۰۰ تومان حقوق پایه دریافت می‌کند و به ازای هر مشتری جدید که جذب می‌کند، ۵۰,۰۰۰ تومان به حقوقش اضافه می‌شود. الف) قانونی برای حقوق علی به عنوان تابعی از تعداد مشتری‌هایی که ماهانه جذب می‌کند بنویسید. ب) اگر او در یک ماه ۱۲ مشتری جدید جذب کرده باشد، میزان حقوق او در آن ماه چقدر است؟ پ) چرا این تابع خطی است؟ ت) اگر علی بخواهد در یک ماه ۲,۰۰۰,۰۰۰ تومان حقوق بگیرد، در این ماه چند مشتری باید جذب کند؟

۱. اگر تعداد مشتری‌های جدید x باشد: f(x) = 1000000 + 50000 x (حقوق بر حسب تومان).

۲. f(12) = 1000000 + 50000 x 12 = 1600000 تومان.

۳. قانون تابع یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۱ است؛ به ازای هر مشتری جدید، حقوق به مقدار ثابت ۵۰,۰۰۰ تومان افزایش می‌یابد (نمودار آن خط راست با شیب ۵۰,۰۰۰ است).

۴. 2000000 = 1000000 + 50000 x پس 1000000 = 50000 x و x = 20. علی باید در آن ماه **۲۰ مشتری** جذب کند.

۹ صفحه ۴۴ مسئله

آرمان سوار بر یک کشتی در فاصله‌ی ۱۰ کیلومتری از ساحل قرار دارد و با سرعت ثابت ۳ کیلومتر بر ساعت از ساحل دور می‌شود. این حرکت ۵ ساعت ادامه داشته است. الف) قانون و دامنه‌ی تابع مربوط به فاصله‌ی

آرمان از ساحل (بر حسب کیلومتر) را بر حسب t (زمان بر حسب ساعت) بنویسید. ب) آرمان پس از ۲ ساعت در چه فاصله‌ای از ساحل خواهد بود؟ پ) چرا این تابع خطی است؟ شیب نمودار این تابع مثبت است یا منفی؟

1. $d(t) = 10 + 3t$ با دامنه‌ی $[0, 5]$.
2. $d(2) = 10 + 3 \times 2 = 16$، یعنی ۱۶ کیلومتر از ساحل.
3. قانون تابع چندجمله‌ای درجه‌ی ۱ است و در هر ساعت فاصله به مقدار ثابت ۳ کیلومتر زیاد می‌شود. شیب نمودار برابر 3 و **مثبت** است.

۱۰ صفحه ۴۵ مسئله

دمای هوا در شهر تهران در تابستان، در طول یک هفته، در ساعت ۱ ظهر، ۳۵ درجه‌ی سانتی‌گراد بوده است. الف) جدول را برای روزهای $d = 1, 2, ..., 7$ کامل کنید (دما t بر حسب درجه‌ی سانتی‌گراد). ب) دامنه و قانون این تابع را بنویسید. پ) آیا این تابع، یک تابع ثابت است؟ چرا؟ ت) نمودار تابع را در دامنه‌اش رسم کنید.

1. دما در هر هفت روز 35 است:

جدول کامل‌شده

d (روز)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
t (درجه‌ی سانتی‌گراد)	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵

ب) دامنه: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (روزهای هفته) و قانون: $t(d) = 35$.

پ) بله؛ به ازای همه‌ی مقادیر دامنه، مقدار تابع یکسان (۳۵) است.

ت) نمودار شامل ۷ نقطه‌ی $(1, 35), (2, 35), ..., (7, 35)$ است که همگی روی خط افقی $t = 35$ قرار دارند (اگر مدت زمان را پیوسته در نظر بگیریم، پاره‌خط افقی از $d = 1$ تا $d = 7$ است).

۱۱ صفحه ۴۵ مسئله

رابطه‌ی بین دو واحد اندازه‌گیری دما، درجه‌ی سانتی‌گراد (c) و درجه‌ی فارنهایت (F) با قانون $F(c) = 9/5\ c + 32$ بیان می‌شود. الف) مقدارهای $F(28)$ و $F(-40)$ را محاسبه کنید و معنای آن را بیان کنید. ب) دمای صفر درجه‌ی سانتی‌گراد، معادل چند درجه‌ی فارنهایت است؟ پ) اگر $F(c) = 212$، مقدار c را حساب کنید. c چه چیزی را نشان می‌دهد؟

الف) $F(28) = 9/5 \times 28 + 32 = 50.4 + 32 = 82.4$: دمای ۲۸ درجه‌ی سانتی‌گراد برابر ۸۲٫۴ درجه‌ی فارنهایت است.

$-40 = 32 + -72 = 32 + (-40) \times 9/5 = F(-40)$: دمای ۴۰- درجه‌ی سانتی‌گراد با ۴۰- درجه‌ی فارنهایت برابر است (دمایی که دو مقیاس عدد یکسان نشان می‌دهند).

ب) $F(0) = 32 = 32 + 0 \times 9/5$

صفر درجه‌ی سانتی‌گراد برابر ۳۲ درجه‌ی فارنهایت است.

پ) $212 = 32 + c \times 9/5$ پس $180 = c \times 9/5$ و $100 = 180 \times 5/9 = c$.

c = 100: دمای جوش آب (در شرایط معمولی) بر حسب سانتی‌گراد.

---

۱۲ صفحه ۴۷ فعالیت

به کمک نرم‌افزار نمودار تابع $y = x^2$ را رسم کنید و به سؤال‌ها پاسخ دهید. ۱) نمودار تابع‌های درجه‌ی دوم $y = x^2 + p$ را به ازای مقادیر مختلف p رسم کنید. وضعیت نمودار تابع $y = x^2 + p$ را با نمودار تابع $y = x^2$ توصیف کنید.

۲) نمودار تابع‌های $y = (x - q)^2$ را به ازای مقادیر مختلف q رسم کنید. وضعیت نمودار را با نمودار تابع $y = x^2$ توصیف کنید.

۳) نمودار تابع‌های $y = kx^2$ را به ازای مقادیر مثبت و منفی برای k رسم کنید. با تغییر علامت k از مثبت به منفی چه تغییری در نمودار ایجاد می‌شود؟

---

۱) نمودار $y = x^2 + p$ همان نمودار $y = x^2$ است که به اندازه‌ی $|p|$ واحد در راستای محور y جابه‌جا شده است: اگر $p > 0$ به بالا و اگر $p < 0$ به پایین. رأس سهمی از $(0, 0)$ به $(0, p)$ می‌رود.

۲) نمودار $y = (x - q)^2$ همان نمودار $y = x^2$ است که به اندازه‌ی $|q|$ واحد در راستای محور x جابه‌جا شده است: اگر $q > 0$ به راست و اگر $q < 0$ به چپ. رأس سهمی $(q, 0)$ می‌شود.

۳) اگر $k > 0$ نمودار رو به بالا (دهانه‌ی سهمی به سمت بالا) و اگر $k < 0$ رو به پایین است؛ یعنی نمودار $y = -|k|x^2$ قرینه‌ی نمودار $y = |k|x^2$ نسبت به محور xهاست. هرچه $|k|$ بزرگ‌تر باشد، سهمی تنگ‌تر است.

---

۱۳ صفحه ۴۸ کار در کلاس

نمودارهای داده شده مربوط به تابع درجه‌ی دوم $y = k(x - q)^2 + p$ هستند. علامت k و مقدار p و q را تعیین کنید. (دو نمودار الف و ب)

روش: رأس سهمی نقطه‌ی (q, p) است. اگر دهانه‌ی سهمی به بالا باشد $k > 0$ و اگر به پایین باشد $k < 0$. طول رأس را q و عرض رأس را p می‌گیریم.

الف) سهمی رو به پایین با رأس تقریبی $(2, 3)$:

$p = 3 ،q = 2 ،k < 0$

ب) سهمی رو به بالا با رأس تقریبی $(-2, -3)$:

$p = -2 ،q = -3 ،k > 0$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۴ صفحه ۴۹ مسئله

نمودارهای زیر مربوط به تابع درجه‌ی دوم $y = k(x - q)^2 + p$ هستند. علامت k و مقدار q و p را تعیین کنید.

از روی شکل، رأس سهمی (q, p) را می‌خوانیم و از جهت دهانه، علامت k را: دهانه‌ی رو به بالا یعنی $k > 0$ و رو به پایین یعنی $k < 0$.

۱. ○ سهمی رو به بالا با رأس تقریبی $(3, 1)$: $k > 0 ،q = 3 ،p = 1$.

۲. ○ سهمی رو به پایین با رأس تقریبی $(-2, 5)$: $k < 0 ،q = -2 ،p = 5$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۵ صفحه ۴۹ مسئله

نمودار زیر مربوط به یک تابع درجه‌ی دوم است. مشخص کنید کدام قانون مربوط به این نمودار است. الف) $f(x) = (x - 1)^2 + 1$ ب) $f(x) = (x - 1)^2 - 1$ پ) $f(x) = (x + 1)^2 + 2$ ت) $f(x) = (x + 1)^2 - 2$

رأس سهمی در ناحیه‌ی $x < 0$ (سمت چپ محور y) است، پس $q = -1$ و قانون به شکل $(x + 1)^2 + p$ است؛ یعنی گزینه‌ی «پ» یا «ت». چون رأس زیر محور xها (حدود $(-2, -1)$) قرار دارد، $p = -2$؛ ریشه‌های تابع $x = -1 \pm \sqrt{2}$ (حدود ۰٫۴ و ۲٫۴-) هستند و سهمی محور x را در دو نقطه قطع می‌کند.

گزینه‌ی «ت»: $f(x) = (x + 1)^2 - 2$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۱۶ صفحه ۴۹ مسئله

فرید بسکتبال بازی می‌کند. تصویر یک پرتاب او را به سمت سبد نشان می‌دهد. صفحه‌ی مختصات طوری قرار داده شده است که مبدأ مختصات دقیقاً نقطه‌ی پرتاب توپ باشد. ارتفاع توپ از سطح زمین در هر لحظه یک تابع درجه‌ی دوم با قانون $h(x) = k(x - q)^2 + p$ است. علامت k و p و q را تعیین کنید.

توپ پس از پرتاب بالا می‌رود، به بیشترین ارتفاع می‌رسد و سپس پایین می‌آید؛ پس سهمی رو به پایین است و رأس آن (بالاترین نقطه‌ی مسیر) در ناحیه‌ی اول، یعنی بالا و سمت راست مبدأ، قرار دارد:

$k < 0$، $q > 0$، $p > 0$

(رأس (q, p): q فاصله‌ی افقی تا بالاترین نقطه و p بیشترین ارتفاع توپ است.)

۱۷ صفحه ۵۰ فعالیت

اگر دما در سطح دریا ۱۵ درجه‌ی سانتی‌گراد باشد، در کوه دماوند رابطه‌ی بین دما (T بر حسب درجه‌ی سانتی‌گراد) و ارتفاع از سطح دریا (h بر حسب متر) با تساوی $T(h) = 15 - h/150$ مشخص می‌شود. دامنه‌ی این تابع بازه‌ی $[[0, 5610]$ است. ۱) $T(0)$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۲) در ارتفاع ۱۸۰۰ متری از سطح دریا، دما چند درجه است؟

۳) با توجه به نمودار تابع T: الف) تابع T از درجه‌ی .... است. ب) نمودار این تابع در چه نقطه‌ای محور افقی (ارتفاع) را قطع می‌کند؟ این نقطه چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۴) جواب معادله‌ی $15 - h/150 = 0$ را بیابید. جواب این معادله چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۵) از مقایسه‌ی (۳) و (۴) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱) $T(0) = 15$: دمای هوا در سطح دریا ($h = 0$) که ۱۵ درجه‌ی سانتی‌گراد است.

۲) $T(1800) = 15 - 1800/150 = 15 - 12 = 3$

دما در ارتفاع ۱۸۰۰ متری، ۳ درجه‌ی سانتی‌گراد است.

۳) الف) $T(h) = -1/150\ h + 15$ یک چندجمله‌ای درجه‌ی **۱** است (تابع خطی).

ب) نمودار محور ارتفاع را در نقطه‌ی $h = 2250$ قطع می‌کند (در نمودار، طول این نقطه ۲۲٫۵ واحد است، چون هر واحد ۱۰۰ متر است). در این نقطه $T = 0$ است، یعنی ارتفاعی که دما ۰ درجه‌ی سانتی‌گراد می‌شود.

۴) $15 - h/150 = 0$ پس $h/150 = 15$ و $h = 2250$.

در ارتفاع ۲۲۵۰ متری از سطح دریا، دما صفر درجه‌ی سانتی‌گراد است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۵) جواب معادله‌ی T(h) = 0 با طول نقطه‌ی برخورد نمودار تابع T و محور افقی یکسان است؛ یعنی برای حل معادله‌ی T(h) = 0 می‌توان طول محل برخورد نمودار با محور h را پیدا کرد.

---

۱۸ صفحه ۵۲ | کار در کلاس

آب از بالای آبشاری که ارتفاع آن ۱۸۰ متر است، به رودخانه می‌ریزد. تابع h با قانون $h(t) = -5t^2 + 180$ ارتفاع هر قطره‌ی آب (بر حسب متر) از سطح رودخانه را بعد از t ثانیه از جدا شدن از بالای آبشار مشخص می‌کند.

۱) ارتفاع یک قطره‌ی آب از سطح رودخانه بعد از ۲ ثانیه چقدر است؟

۲) نمودار تابع h(t) با دامنه‌ی R آورده شده است (هر واحد ۱۰ متر). نمودار این تابع در چه نقطه‌هایی محور xها را قطع می‌کند؟ این نقطه‌ها چه چیزی را نشان می‌دهند؟

۳) جواب‌های معادله‌ی $-5t^2 + 180 = 0$ چه مقادیری هستند؟ کدام جواب در شرایط این مسئله قابل قبول نیست؟ دلیل خود را بیان کنید.

۴) دامنه‌ی تابع h را طوری تعیین کنید که قانون h(t) ارتفاع قطره‌ی آب از سطح رودخانه را مشخص کند.

۱) $h(2) = -5 \times 4 + 180 = 160$

ارتفاع قطره بعد از ۲ ثانیه ۱۶۰ متر است.

۲) نمودار (سهمی رو به پایین با رأس (0, 180)) محور t را در دو نقطه‌ی (0, −6) و (0, 6) قطع می‌کند. این نقطه‌ها زمان‌هایی را نشان می‌دهند که ارتفاع قطره از سطح رودخانه صفر است، یعنی قطره به رودخانه می‌رسد.

۳) $-5t^2 + 180 = 0$ پس $t^2 = 36$ و $t = 6$ یا $t = -6$. جواب $t = -6$ قابل قبول نیست؛ زیرا زمان از لحظه‌ی جدا شدن قطره از آبشار شروع می‌شود و منفی نمی‌تواند باشد. زمان رسیدن قطره به رودخانه ۶ ثانیه است.

۴) قطره از $t = 0$ تا لحظه‌ی رسیدن به رودخانه ($t = 6$) سقوط می‌کند:

دامنه: [0, 6]

---

۱۹ صفحه ۵۳ | مسئله

اگر نمودار تابع f به شکل داده شده باشد، کدام گزینه جواب‌های معادله‌ی $f(x) = 0$ است؟ الف) ۲ و ۲− و ۱− ب) ۱ و ۱− و ۰٫۸ پ) ۲ و ۰٫۸ و ۱− ت) معادله جواب ندارد.

جواب‌های $f(x) = 0$ طول نقاط برخورد نمودار با محور xها هستند. نمودار محور xها را در سه نقطه به طول‌های حدود 1−، 0.8 و 2 قطع می‌کند.

گزینه‌ی «پ»: ۲ و ۰٫۸ و ۱−

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۰ صفحه ۵۳ مسئله

معادله‌های زیر را به کمک رسم نمودار با استفاده از نرم‌افزار حل کنید. الف) x^2 − 6 = 0 ب) 3x^2 − 2x = 16
پ) x^3 − x^2 = 4x + 1 ت) x^3 + 5x + 6 = 0

روش: هر معادله را به شکل f(x) = 0 می‌نویسیم، نمودار f را رسم می‌کنیم و طول نقاط برخورد با محور xها را می‌خوانیم.

۱. f(x) = x^2 − 6: سهمی رو به بالا با رأس (0, −6) که محور را در x = pm sqrt(6) ~ pm 2.45 قطع می‌کند. جواب‌ها: x = sqrt(6) و x = −sqrt(6).

۲. f(x) = 3x^2 − 2x − 16: سهمی رو به بالا که محور را در x = −2 و x = 8/3 ~ 2.67 قطع می‌کند. جواب‌ها: x = −2 و x = 8/3 (درستی: 3 x 4 + 4 − 16 = 0).

۳. f(x) = x^3 + 5x + 6: نمودار صعودی است و محور x را فقط یک بار در x = −1 قطع می‌کند. جواب: x = −1 (درستی: −1 − 5 + 6 = 0).

۴. f(x) = x^3 − x^2 − 4x − 1: نمودار محور xها را در سه نقطه‌ی تقریبی x ~ −1.38، x ~ −0.27− و x ~ 2.65 قطع می‌کند. جواب‌ها (تقریبی): همین سه مقدار.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۱ صفحه ۵۳ مسئله

اگر توپی را به هوا پرتاب کنیم، ارتفاع آن از سطح زمین (بر حسب متر) تابعی از زمان (بر حسب ثانیه) است. برای یک پرتاب خاص، h(t) = −5t^2 + 20t و دامنه‌ی تابع [[0, 4 است. در چه زمان‌هایی ارتفاع این توپ ۲ متر است؟ چند جواب به دست می‌آید؟ چرا؟

h(t) = 2 یعنی −5t^2 + 20t − 2 = 0 یا 5t^2 − 20t + 2 = 0. با فرمول ریشه‌ها:

t = (20 pm sqrt(400 − 40)) / 10 = 2 pm (3 sqrt(10))/5 ~ 2 pm 1.90

t ~ 0.10 ثانیه و t ~ 3.90 ثانیه

هر دو جواب در دامنه‌ی [[0, 4 هستند، پس **دو جواب** به دست می‌آید؛ زیرا توپ یک بار در مسیر بالا رفتن و یک بار در مسیر پایین آمدن از ارتفاع ۲ متری می‌گذرد (بیشترین ارتفاع توپ h(2) = 20 متر است). در نمودار، خط y = 2 سهمی را در دو نقطه قطع می‌کند.

۲۲ صفحه ۵۴ فعالیت

رابطه‌ی بین قیمت کالا (p بر حسب هزار تومان) و تعداد کالای فروخته شده (x) به صورت x = 200 − 80000p داده شده است. هدف، رسیدن درآمد فروش به بیش از ۸ میلیون تومان است. ۱) درآمد حاصل از فروش x کالا با قیمت p را با R نشان دهید و معادله‌ی درآمد را تشکیل دهید.

۲) تابع درآمد را بر حسب p بنویسید.

۳) چندجمله‌ای قانون تابع درآمد بر حسب p از درجه‌ی چند است؟

۴) رابطه‌ای برای p بنویسید که در آن، درآمد حاصل از فروش دست‌سازها بیشتر از ۸ میلیون تومان باشد.

۱) درآمد برابر قیمت هر کالا ضرب‌در تعداد فروش است: R = p x x.

۲) با جای‌گذاری x = 200 − 80000p: R(p) = p(200 − 80000p) = −80000p^2 + 200p.

۳) درجه‌ی **۲** (بیشترین توان p برابر ۲ است).

۴) ۸ میلیون تومان برابر ۸۰۰۰ هزار تومان است، پس:

−80000p^2 + 200p > 8000

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۳ صفحه ۵۵ کار در کلاس

در یک شرکت سازنده‌ی تلفن همراه، رابطه‌ی بین قیمت فروش تلفن همراه (p برحسب صدهزار تومان) و تعداد تلفن همراه فروخته شده (x) از رابطه‌ی p = 0.25 − 15x به دست می‌آید. ۱) مقدار x را بر حسب p بنویسید.

۲) درآمد حاصل از فروش تعداد x کالا (R(p)) را بر حسب p بنویسید.

۳) نامعادله‌ای بنویسید که نشان دهد برای چه مقدارهای p، درآمد حاصل از فروش بیشتر از ۴۰۰ میلیون است.

۱) 15x = 0.25 − p پس x = (0.25 − p)/15.

۲) R(p) = p x x = p (0.25 − p)/15 = (0.25 p − p^2)/15.

۳) ۴۰۰ میلیون تومان برابر ۴۰۰۰ صدهزار تومان است (واحد درآمد را مانند واحد p می‌گیریم)، پس:

(0.25 p − p^2)/15 > 4000

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۴ صفحه ۵۶ فعالیت

تابع f(x) = x^2 – 7x + 10 را با دامنه‌ی R در نظر بگیرید. نمودار آن رسم شده است. ۱) طول نقاط محل برخورد نمودار تابع با محور xها چه چیزی را نشان می‌دهند؟ ۲) با استفاده از نمودار، جواب‌های معادله‌ی f(x) = 0 را به دست آورید. ۳) آن قسمت از نمودار را که بالای محور xها است رنگی کنید و جمله را کامل کنید: عرض نقاط رنگی (کوچک‌تر از صفر / بزرگ‌تر از صفر) است. ۴) به ازای چه مقادیری از دامنه، مقدار تابع مثبت است؟ این مقادیر را به صورت بازه نمایش دهید. ۵) مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی x^2 – 7x + 10 > 0 با مجموعه‌ی به دست آمده در (۴) چه رابطه‌ای دارد؟ ۶) آن قسمت از نمودار را که پایین محور xها است با رنگ دیگری مشخص کنید. ۷) به ازای چه مقادیری از دامنه، مقدار تابع منفی است؟ با بازه بنویسید. ۸) آیا مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی x^2 – 7x + 10 < 0 همان مجموعه‌ی به دست آمده در (۷) است؟ توضیح دهید.

۱) این طول‌ها، جواب‌های (ریشه‌های) معادله‌ی f(x) = 0 هستند.

۲) x^2 – 7x + 10 = (x – 2)(x – 5) = 0 پس x = 2 یا x = 5 (نمودار محور را در این دو نقطه قطع می‌کند).

۳) عرض نقاط رنگی **بزرگ‌تر از صفر** است.

۴) نمودار سهمی رو به بالا، بیرون از دو ریشه بالای محور است:

(–inf, 2) U (5, +inf)

۵) دقیقاً یکی هستند؛ چون f(x) > 0 یعنی نقطه‌ی نمودار بالای محور xها باشد، پس مجموعه‌ی جواب نامعادله همان مقادیر x به دست آمده در (۴) است.

۶) قسمت پایین محور، بین دو نقطه‌ی برخورد (x = 2 تا x = 5) است.

۷) مقدار تابع در این بازه منفی است:

(2, 5)

۸) بله؛ f(x) < 0 یعنی نقطه‌ی نمودار پایین محور xها باشد و آن قسمت دقیقاً بازه‌ی (2, 5) است.

۲۵ صفحه ۵۸ کار در کلاس

مستطیل‌هایی را در نظر بگیرید که طول آن‌ها ۸ سانتی‌متر بیشتر از عرض آن‌هاست. عرض این مستطیل‌ها چه مقادیری باید داشته باشد تا مساحت آن‌ها از ۲۵ سانتی‌متر مربع کمتر باشد؟

عرض را x می‌گیریم (x > 0)؛ طول x + 8 است و باید x(x + 8) < 25 یعنی x^2 + 8x – 25 < 0.

تابع f(x) = x^2 + 8x – 25 سهمی رو به بالاست و ریشه‌های آن از x = (–8 pm sqrt(64 + 100))/2 = –4 pm sqrt(41) به دست می‌آید؛ یعنی x ~ –10.40 و x ~ 2.40. نمودار فقط بین دو ریشه زیر محور x ها است، پس –4 – sqrt(41) < x < –4 + sqrt(41).

چون عرض مثبت است، قسمت منفی کنار گذاشته می‌شود:

0 < x < -4 + sqrt(41) یعنی عرض بین ۰ و حدود ۲٫۴ سانتی‌متر

۲۶ صفحه ۵۹ مسئله

در شکل، نمودارهای چهار تابع رسم شده است. در هر مورد، مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی f(x) <= 0 را مشخص کنید.

f(x) <= 0 یعنی نقطه‌ی نمودار روی محور xها یا زیر آن باشد؛ پس مجموعه‌ی جواب، طول‌هایی از x است که نمودار در آن‌ها زیر محور است، به‌علاوه‌ی طول نقاط برخورد با محور (چون علامت «کمتر یا مساوی» داریم). برای هر نمودار:

- اگر نمودار (سهمی رو به بالا) محور را در x = a و x = b قطع کند: جواب [[a, b]] است.
- اگر نمودار (سهمی رو به پایین) محور را در x = a و x = b قطع کند: جواب (−inf, a] U [b, +inf) است.
- اگر نمودار کاملاً بالای محور باشد: جواب مجموعه‌ی تهی است؛ و اگر رأس روی محور باشد، فقط همان طول رأس جواب است.
- اگر نمودار خط باشد، جواب یک نیم‌خط بسته از محل برخورد با محور است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۷ صفحه ۵۹ مسئله

نامعادله‌های زیر را حل کنید. الف) 3x^2 − 3 > 0 ب) x^2 − 5x − 1 < 0 پ) −x^2 + 4x + 3 >= −2

الف) 3x^2 − 3 = 3(x − 1)(x + 1) با ریشه‌های x = pm 1. سهمی رو به بالاست و بیرون از ریشه‌ها بالای محور است:

(−inf, −1) U (1, +inf)

ب) ریشه‌های x^2 − 5x − 1 = 0: x = (5 pm sqrt(29))/2؛ یعنی x ~ −0.19 و x ~ 5.19. سهمی رو به بالا و بین ریشه‌ها زیر محور است:

((5 − sqrt(29))/2 , (5 + sqrt(29))/2)

پ) نامعادله را به شکل −x^2 + 4x + 5 >= 0 یا x^2 − 4x − 5 <= 0 می‌نویسیم: (x − 5)(x + 1) <= 0. ریشه‌ها −1 و 5 هستند و سهمی x^2 − 4x − 5 بین ریشه‌ها منفی است (و در خود ریشه‌ها صفر):

[[-1, 5

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۸ صفحه ۵۹ مسئله

پرتابه‌ای به طور عمودی به هوا پرتاب می‌شود. ارتفاع این پرتابه از سطح دریا (بر حسب متر) به صورت تابعی از زمان (بر حسب ثانیه) با رابطه‌ی h(t) = -5t^2 + 100t داده شده است. مشخص کنید در چه بازه‌ی زمانی، ارتفاع این پرتابه بیش از ۲۰۰ متر خواهد بود.

$-5t^2 + 100t > 200$ پس $-5t^2 + 100t - 200 > 0$ و با تقسیم بر -5 (جهت نامساوی عوض می‌شود): $t^2 - 20t + 40 < 0$.

ریشه‌ها: $t = (20 \pm \sqrt{400 - 160})/2 = 10 \pm \sqrt{60} = 10 \pm 2\sqrt{15}$ یعنی $t \approx 2.25$ و $t \approx 17.75$. سهمی $t^2 - 20t + 40$ بین ریشه‌ها منفی است:

$10 - 2\sqrt{15} < t < 10 + 2\sqrt{15}$؛ تقریباً بین ۲٫۲۵ و ۱۷٫۷۵ ثانیه

(پرتابه در $t = 20$ به زمین (ارتفاع صفر) می‌رسد و بیشترین ارتفاع آن $h(10) = 500$ متر است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۹ صفحه ۵۹ مسئله

مقدار x را طوری بیابید که اندازه‌ی محیط مثلث از اندازه‌ی مساحت مربع کمتر باشد. (اضلاع مثلث $x + 5$، $x + 4$ و $x + 5$ و ضلع مربع $x + 8$ است.)

محیط مثلث: $(x + 5) + (x + 4) + (x + 5) = 3x + 14$ و مساحت مربع: $(x + 8)^2 = x^2 + 16x + 64$.

باید $x^2 + 16x + 64 > 3x + 14$ یعنی $x^2 + 13x + 50 > 0$. مبین این سه‌جمله‌ای $169 - 200 = -31 < 0$ است، پس سهمی محور xها را قطع نمی‌کند و همیشه بالای آن است؛ نامعادله به ازای هر x برقرار است.

به ازای همه‌ی مقادیر مجاز x (که طول‌ها مثبت باشند: $x > -4$، و برای طول‌های عملی $x > 0$) محیط مثلث کمتر از مساحت مربع است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

۳۰ صفحه ۵۹ مسئله

علی به تازگی یک کارگاه تولید قطعات یدکی راه‌اندازی کرده است. درآمد حاصل از فروش کالا به قیمت p (بر حسب تومان) از قانون R(p) = −100p^2 + 50000p به دست می‌آید. به ازای چه مقادیری برای p، میزان درآمد شرکت بیش از ۱۰٬۰۰۰٬۰۰۰ است؟

باید 10000000 < −100p^2 + 50000p یعنی (با تقسیم بر −100): p^2 − 500p + 100000 < 0.

مبین: 500^2 − 4 × 100000 = 250000 − 400000 = −150000 < 0؛ پس سهمی p^2 − 500p + 100000 همیشه بالای محور p است و هیچ‌گاه منفی نمی‌شود. (به‌عبارت دیگر بیشترین درآمد در رأس سهمی، p = 250، برابر R(250) = 6250000 است که از ۱۰٬۰۰۰٬۰۰۰ کمتر است.)

هیچ مقداری برای p وجود ندارد؛ مجموعه‌ی جواب تهی است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت